

Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι - Πρώτη Πρόοδος (05/04/2025)

Διάρκεια 3 Ώρες

Θέμα 1 (1+1 μον.)

Να βρεθούν όλες οι λύσεις $z \in \mathbb{C}$ των εξισώσεων:

$$(\alpha) (\bar{z} - i)^4 = -\sqrt{3} + i \quad \text{και} \quad (\beta) e^z = \left(\frac{3 - 3i}{1 + i} \right)^3.$$

Θέμα 2 (1+1 μον.)

Να προσδιοριστεί την εικόνα $f(S)$ του S σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις. Να σχεδιαστεί πρόχειρα το σύνολο $f(S)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

$$(\alpha) S = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, \frac{\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) \leq \frac{3\pi}{4}\} \text{ και } f(z) = e^z$$

$$(\beta) S = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < |z - i|\} \text{ και } f(z) = \frac{1}{z}$$

Θέμα 3 (1+1 μον.)

Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη, και αν υπάρχουν υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$(\alpha) \lim_n n \operatorname{Im}(\sqrt[n]{z}) \quad \text{και} \quad (\beta) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$$

Θέμα 4 (1+1 μον.)

(α) Έστω $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του D . Να αποδειχθεί η ισοδυναμία

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w \text{ και } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w$$

(β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση του κυρίου ορίσματος $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ είναι συνεχής στο σημείο $z_1 = i$ και μη συνεχής στο σημείο $z_2 = -1$.

Θέμα 5 (1+1 μον.)

(α) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Αν οι συναρτήσεις $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $u = \operatorname{Re}(f)$ και $v = \operatorname{Im}(f)$ είναι διαφορίσιμες στο σημείο (x_0, y_0) και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο αυτό, να δειχθεί ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο σημείο $z_0 = x_0 + iy + 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2}{|z|}, \quad z \neq 0 \text{ και } f(0) = 0$$

δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

(α) Θέτουμε $w = \bar{z} - i$ και λύνουμε τη διωνυμική εξίσωση $w^4 = -\sqrt{3} + i$.

Τύπος λύσεων:

$$w_k = |-\sqrt{3} + i|^{1/4} \cdot e^{\frac{\text{Arg}(-\sqrt{3} + i) + 2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

όπου $|-\sqrt{3} + i| = 2$ και $\text{Arg}(-\sqrt{3} + i) = \frac{2\pi}{3}$.

Άρα, $\bar{z}_k = w_k + i \Rightarrow z_k = \bar{w}_k - i, \quad k = 0, 1, 2, 3$

(β) Αρχικά, $\left(\frac{3-3i}{1+i}\right)^3 = \dots = 27i$.

Τύπος λύσεων: $z_k = \ln|27i| + i(\text{Arg}(27i) + 2k\pi) = 3\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Θέμα 2

(α) $f(S) = \{re^{i\phi} : r \in (e^{-1}, e), \phi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$ και είναι το τμήμα κυκλικού δακτυλίου που περιβάλλεται από τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$ χωρίς φυσικά τα σημεία της ευθείας $y = x$.

(β) $f(S) = \{x + iy : 3x^2 + 3y^2 - 4x - 2y < 0\}$ το οποίο με συμπλήρωση τετραγώνων προκύπτει κυκλικός δίσκος κέντρου $K(2/3, -1/3)$ και ακτίνας $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$ δηλαδή, όλα τα σημεία εσωτερικά του κύκλου

$(x - 2/3)^2 + (y + 1/3)^2 = \frac{5}{9}$ χωρίς την περιφέρεια (ελέγξτε τις λεπτομέρειες).

Θέμα 3

(α) Αρχικά, αν $z = 0$ τότε $\lim_n n \text{Im}(\sqrt[n]{z}) = 0$. Επίσης, από το γνωστό πραγματικό όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ προκύπτει ότι $\lim_n n \text{Im}(\sqrt[n]{z}) = \text{Arg}(z), \quad \forall z \neq 0$.

(β) Το $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$ δεν υπάρχει π.χ $z_n = \frac{1}{n}$ και $w_n = -\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 4

(α) **Ευθύ:** Ισχύει ότι

$$0 \leq |\text{Re}f(z) - \text{Re}w|, |\text{Im}f(z) - \text{Im}w| \leq |f(z) - w| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

και άρα από Ισοσύγκλιση συναρτήσεων, έπεται $\lim_{z \rightarrow z_0} |\text{Im}f(z) - \text{Im}w| = \lim_{z \rightarrow z_0} |\text{Re}f(z) - \text{Re}w| = 0$, το οποίο δίνει το ζητούμενο.

Αντίστροφο: Εφόσον $|\text{Re}f(z) - \text{Re}w| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ και $|\text{Im}f(z) - \text{Im}w| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ και από τη συνέχεια της ρίζας, του αθροίσματος και της δύναμης, συνάγουμε

$$|f(z) - w| = \sqrt{|\text{Re}f(z) - \text{Re}w|^2 + |\text{Im}f(z) - \text{Im}w|^2} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.

(β) Η $z \mapsto \text{Arg}(z)$ είναι συνεχής στο $z_1 = i$ γιατί για κάθε $z \in D(i, 1)$ εύκολα φαίνεται ότι

$$|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(i)| = \left| \text{Arg}(x + iy) - \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}, \quad y > 0$$

και άρα

$$\lim_{z \rightarrow i} \left| \text{Arg}(z) - \frac{\pi}{2} \right| = 0$$

δηλαδή, η συνάρτηση του κυρίου ορίσματος είναι συνεχής στο $z_1 = i$.

Επίσης, αν επιλέξουμε την ακολουθία $z_n = -1 - \frac{i}{n}, n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι αφενός $z_n \rightarrow -1$ αφετέρου $\text{Arg}(z_n) \rightarrow -\pi \neq \pi = \text{Arg}(-1)$ το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση του κυρίου ορίσματος δεν είναι συνεχής στο $z_2 = -1$.

Θέμα 5

(α) Πρόκειται για τη **μια** από τις δύο κατευθύνσεις της απόδειξης του Θεωρήματος των Cauchy και Riemann (Θεωρία).

(β) Γράφουμε την f σε αλγεβρική μορφή θέτοντας $z = x + iy$. Οπότε, η f γράφεται:

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{-2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Θέτουμε,

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u(0, 0) = 0$$

και

$$v(x, y) = \frac{-2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(0, 0) = 0.$$

Βρίσκουμε για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ τις μερικές παραγώγους u_x, u_y, v_x, v_y (βρείτε αυτές) και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων Cauchy - Riemann $u_x = v_y$ και $v_x = -u_y$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και η μοναδική λύση που βρίσκουμε είναι το $(0, 0)$ που απορρίπτεται αφού υποθέσαμε ότι $(x, y) \neq (0, 0)$. Άρα, η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα $z_0 \neq 0$. Ωστόσο, μένει να εξετάσουμε την μιγαδική διαφορισιμότητα της f στο $z_0 = 0$. Με τον ορισμό: Το όριο

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z|z|}$$

δεν υπάρχει π.χ $z_n = \frac{1}{n}$ και $w_n = \frac{i}{n}, n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη ούτε στο $z_0 = 0$.

Στοιχειοθεσία Λύσεων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός MSc

Τομέας: Ανάλυση - Άλγεβρα - Γεωμετρία

e-mail: kdimoglou@onlymaths.gr